JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 13, 341-347 (1975)

Zur Quadratur Holomorpher Periodischer Funktionen

ARNOLD SCHÖNHAGE

Mathematisches Institut, Universität Tübingen, 74 Tübingen 1, Auf der Morgenstelle 10

Communicated by P. L. Butzer

HERRN G. G. LORENTZ ZU SEINEM 65. GEBURTSTAG

1.

Die bei numerischer Quadratur auftretenden Restglieder lassen sich im Falle holomorpher Integranden durch Verwendung passender Integralformeln ableitungsfrei abschätzen. Besonders elegant und durchsichtig gestaltet sich diese Idee bei Betrachtung geeigneter Hilberträume holomorpher Funktionen, und mittels explizit angebbarer Orthonormalbasen gelingt unter Umständen sogar die genaue Bestimmung der Normen solcher Quadraturfehlerfunktionale. Ein auch im Vergleich zu den nachfolgenden Untersuchungen instruktives Beispiel dieser Methode findet man in [2].

Wesentlich neue Probleme wirft die Berechnung derartiger Fehlernormen auf, wenn die holomorphen Funktionen nicht mit einer Hilbertraumnorm sondern z.B. mit der Supremum-Norm versehen werden. Im folgenden sollen Fragen dieser Art bei der Quadratur periodischer Funktionen behandelt werden.

2.

Bei äquidistanten Stützstellen $x_k = k \cdot 2\pi/n$ führt die trigonometrische Interpolationsquadratur 2π-periodischer Funktionen f auf das Restglied

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k). \tag{1}$$

Für trigonometrische Polynome $g \in \tilde{P}_{n-1}$ vom Grade $\leqslant n-1$ gilt $R_n(g) = 0$; wählt man g als Tschebyscheff-Proximum zu f, so daß also $|f-g| = \tilde{E}_{n-1}(f)$, dann folgt

$$|R_n(f)| = |R_n(f-g)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)-g(t)|\,dt + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)-g(x_k)|,$$
$$|R_n(f)| \leqslant 2\tilde{E}_{n-1}(f). \tag{2}$$

Diese Abschätzung legt nahe, hier Klassen holomorpher Funktionen zu betrachten, deren trigonometrische Approximierbarkeit explizit bekannt ist. Als solche kennt man (vgl. Achieser [1] oder auch [3], pp. 196–201) die reellen Banachräume H_β der im symmetrisch zur reellen Achse gelegenen Streifen $S_\beta = \{x + iy \mid |y| < \beta\}$ holomorphen 2π-periodischen Funktionen f mit reellen Werten $f(x)$ für $x \in \mathbf{R}$ und der Norm

$$|f|_\beta = \sup_{z \in S_\beta} |\operatorname{Re} f(z)| < \infty. \tag{3}$$

Für die Einheitskugeln $H_\beta^1 = \{f \in H_\beta \mid |f|_\beta \leqslant 1\}$ hat man dann

$$\tilde{E}_{n-1}(H_\beta^1) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\operatorname{ch}((2m+1)\, n\beta)} < \frac{8}{\pi}\, e^{-n\beta}, \tag{4}$$

und damit ergibt sich wegen (2) die für praktische Zwecke schon völlig ausreichende Abschätzung

$$|R_n(f)| \leqslant (16/\pi)\, e^{-n\beta}\, |f|_\beta\,. \tag{5}$$

Im weiteren betrachten wir in Verallgemeinerung von (1) die aus der Verwendung von Integrationsgewichten $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = a \in \mathbf{R}^n$ hervorgehenden Restglieder

$$R_a(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f(x_k) \tag{6}$$

und fragen nach optimalem a, so daß R_a als Funktional über H_β minimale Norm $|R_a|_\beta$ hat.

3.

Für $f \in H_\beta$, $\eta < \beta$, $z \in S_\beta$ gilt (vgl. [3], p. 197)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\eta(z - t) \operatorname{Re} f(t + i\eta)\, dt, \tag{7}$$

wobei

$$K_\eta(z) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mz)}{\operatorname{ch}(m\eta)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{\operatorname{ch}(m\eta)}\,. \tag{8}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich wegen $\int_0^{2\pi} K_\eta(t)\, dt = 2\pi$ die Darstellung

$$R_a(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\eta(x_k - t)\right) \operatorname{Re} f(t + i\eta)\, dt \qquad (\eta < \beta). \tag{9}$$

SATZ 1. *Die in* (6) *definierten R_a haben als Funktionale über H_β die Norm*

$$| R_a |_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\beta(x_k - t) \right| dt. \tag{10}$$

Die Abschätzung $| R_a |_\beta \leqslant \cdots$ folgt aus

$$| R_a(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\eta(x_k - t) \right| dt \cdot | f |_\beta$$

nach (9) mittels Grenzübergang $\eta \to \beta$.

Zum Beweis von $| R_a |_\beta \geqslant \cdots$ setzen wir

$$\sigma(t) := \operatorname{sign} \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\beta(x_k - t)\right),$$

$$f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\beta(z - t)\, \sigma(t)\, dt \qquad \text{für} \quad z \in S_\beta .$$

Wegen $\operatorname{Re} K_\beta(u) > 0$ für $u \in S_\beta$ gilt

$$| \operatorname{Re} f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} K_\beta(z - t)\, dt = 1,$$

also $f \in H_\beta$ und $| f |_\beta \leqslant 1$. Weiter hat man beschränkte punktweise Konvergenz $\operatorname{Re}(x + i\eta) \to \sigma(x)$ für $\eta \to \beta$, denn aufgrund von (8) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x + i\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} K_\beta(x + i\eta - t)\, \sigma(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(m\eta)}{\operatorname{ch}(m\beta)} \cos(m(x - t))\right) \sigma(t)\, dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{ch}(m\eta)}{\operatorname{ch}(m\beta)} - \frac{\operatorname{ch}((m + 1)\, \eta)}{\operatorname{ch}((m + 1)\, \beta)}\right) \varphi_m(x), \end{aligned}$$

worin die mit

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{m} \cos(j(x - t))\right) \sigma(t)\, dt$$

gegebenen φ_m die Fourierproxima zu σ sind; weil σ von beschränkter Variation ist, gilt beschränkte punktweise Konvergenz $\varphi_m(x) \to \sigma(x)$ (vgl. [3], p. 94).

So folgt aus (9) mit $\eta \to \beta$ schließlich auch

$$\| R_a \|_\beta \geqslant R_a(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\beta(x_k - t) \right| dt.$$

4.

Satz 1 führt uns auf das Proximumproblem bei der L^1-Approximation der konstanten Funktion 1 durch Funktionen der Form

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k K_\beta(x_k - t); \tag{11}$$

den von diesen Funktionen aufgespannten Unterraum bezeichnen wir im folgenden mit $U_{n,\beta}$.

Sei nun $g_0 \in U_{n,\beta}$ ein L^1-Proximum zu 1,

$$g_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k K_\beta(x_k - t).$$

Dann sind auch die durch

$$g_j(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{k+j} K_\beta(x_k - t), \qquad \text{mit} \quad \gamma_{n+k} = \gamma_k$$

erklärten $g_1, \ldots, g_{n-1}$ L^1-Proxima zu 1 in $U_{n,\beta}$, denn aufgrund der äquidistanten Wahl der x_k ergibt sich vermöge der Substitution $t = s - j \cdot 2\pi/n$ einfach

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | 1 - g_j(t)| \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x_j}^{x_j+2\pi} | 1 - g_0(s)| \, ds = \delta^1(1, U_{n,\beta}).$$

Weiter ist dann wegen der Konvexität der Menge der Proxima auch $\bar{g} = 1/n \sum_{j=0}^{n-1} g_j$ ein L^1-Proximum zu 1, woraus wegen der Stetigkeit der g_j außerdem

$$| 1 - \bar{g}(t)| = \frac{1}{n} \left| \sum_{j=0}^{n-1} (1 - g_j(t)) \right| = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} | 1 - g_j(t)|, \qquad \text{für alle } t \tag{12}$$

folgt.

Mit $x_k = k \cdot 2\pi/n$, $\gamma := \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k$ und (8) berechnet man

$$\bar{g}(t) = \frac{\gamma}{n} \sum_{k=0}^{n-1} K_\beta(x_k - t) = \frac{\gamma}{n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{mk2\pi i/n} \right) \cdot \frac{e^{-imt}}{\operatorname{ch}(m\beta)}$$

$$= \gamma \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu nt}}{\operatorname{ch}(\mu n\beta)} = \gamma \cdot K_{n\beta}(nt). \tag{13}$$

$\bar{g}$ ist demnach $2\pi/n$-periodisch, und damit folgt

$$\delta^1(1, U_{n,\beta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - \bar{g}(t)|\, dt = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} |1 - \gamma K_{n\beta}(nt)|\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - \gamma K_{n\beta}(t)|\, dt = \min_\alpha \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - \alpha K_{n\beta}(-t)|\, dt$$

$$= \delta^1(1, U_{1,n\beta}).$$

Zusammenfassend ergibt sich also

SATZ 2. *Unter allen in* (6) *genannten Quadraturfehlern R_a hat R_c mit den Gewichten $\gamma_k = \gamma/n$ $(0 \leqslant k < n)$ als Funktional über H_β minimale Norm*

$$\| R_c \|_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - \gamma K_{n\beta}(t)|\, dt, \tag{14}$$

wobei γ durch die Minimalität dieses Integrals eindeutig bestimmt ist.

Wir haben mit dieser Formulierung auch schon die Frage nach der Eindeutigkeit des L^1-Proximums angesprochen, die wir nun durch den Nachweis von $g_0 = \bar{g}$ positiv beantworten werden.

Wegen $K_{n\beta}(t) > 0$ für alle $t \in \mathbf{R}$ erfüllt der eindimensionale Unterraum $U_{1,n\beta}$ die Haarsche Bedingung. Damit folgt (vgl. [3], 7.2) die Eindeutigkeit von γ und aus Periodizitätsgründen die Existenz von mindestens zwei Nullstellen von $1 - \gamma K_{n\beta}$ in $[0, 2\pi)$, nebenbei also auch $\gamma > 0$. Nach (13) hat $1 - \bar{g}$ dann mindestens $2n$ Nullstellen in $[0, 2\pi)$.

Jetzt nutzen wir aus, daß K_β eine elliptische Funktion mit den Perioden 2π und $4\beta i$ ist, die im Periodenrechteck

$$Q = \{x + iy \mid 0 \leqslant x < 2\pi,\ -2\beta \leqslant y < 2\beta\},$$

nur einfache Pole an den Stellen $+\beta i$ und $-\beta i$ besitzt. Die in (11) angegebenen $g \in U_{n,\beta}$ haben dann ebenfalls die Perioden 2π und $4\beta i$ und besitzen in Q einfache Pole höchstens an den $2n$ Stellen $x_k \pm \beta i$ $(0 \leqslant k < n)$. Da solche Funktionen über Q jeden Wert seiner Vielfachheit nach gezählt gleich oft annehmen und $\bar{g}$ nach obigem in Q mindestens $2n$ viele 1-Stellen hat, sind die $2n$ reellen Nullstellen von $1 - \bar{g}$ in $[0, 2\pi)$ schon alle Nullstellen in Q, und sie sind überdies einfach; zugleich hat $1 - \bar{g}$ die $2n$ Polstellen $x_k \pm \beta i$. Gemäß diesen Überlegungen stellt

$$q(z) = \frac{1 - g_0(z)}{1 - \bar{g}(z)} = \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k K_\beta(x_k - z)\right) \Big/ \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma}{n} K_\beta(x_k - z)\right)$$

eine elliptische Funktion dar, die den Wert ∞ nicht annimmt, denn die einfachen Pole des Zählers sind auch Pole des Nenners, und die einfachen Nullstellen des Nenners sind nach (12) auch Nullstellen des Zählers. q ist also konstant, und mit $z \to x_k + \beta i$ ergibt sich diese Konstante zu $\gamma_k/(\gamma/n)$ für jedes k. Wegen $\gamma = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k$ folgt so schließlich $\gamma_k = \gamma/n$, d.h. $g_0 = \bar{g}$.

5.

Für das in (1) genannte Restglied bei Interpolationsquadratur ergibt sich nach Satz 1 und den Rechnungen vor Satz 2 die Norm

$$\| R_n \|_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | 1 - K_{n\beta}(t)| \, dt. \tag{15}$$

Um dieses Integral angenähert zu bestimmen, betrachten wir jetzt das umgekehrte L^1-Approximationsproblem, $K_{n\beta}$ durch konstante Funktionen zu approximieren. Das führt (vgl. [1] und (4)) gerade zu

$$\tilde{E}_{n-1}(H_\beta^1) = \tilde{E}_0(H_{n\beta}^1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_{n\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right) - K_{n\beta}(t) \right| dt =: \Delta,$$

wobei nach (8)

$$K_{n\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}(2n\beta)} + \frac{2}{\mathrm{ch}(4n\beta)} - \frac{2}{\mathrm{ch}(6n\beta)} + \cdots > 1 - 4e^{-2n\beta}.$$

Mit (15) ergibt sich so die Einschließung

$$\tilde{E}_{n-1}(H_\beta^1) < \| R_n \|_\beta < \tilde{E}_{n-1}(H_\beta^1) + 4e^{-2n\beta} < (8/\pi)\, e^{-n\beta} + 4e^{-2n\beta}, \tag{16}$$

die übrigens auch zeigt, daß bei der aus (2) unmittelbar folgenden Abschätzung $\| R_n \|_\beta \leqslant 2\tilde{E}_{n-1}(H_\beta^1)$ höchstens der Faktor 2 verschenkt wird.

Man kann, ohne die in Satz 2 auftretende Konstante γ zu berechnen, $\| R_c \|_\beta$ auf folgende Weise nach unten abschätzen: Nach (14) gilt, da Δ den

Abstand von $K_{n\beta}$ zum Unterraum der konstanten Funktionen angibt, einerseits $| R_c |_\beta \geqslant \gamma\Delta$, andererseits aber auch

$$| R_c |_\beta \geqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (1 - K_{n\beta}(t) + (1-\gamma)\, K_{n\beta}(t))\, dt \right|$$

$$= \frac{| 1 - \gamma |}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{n\beta}(t)\, dt \geqslant 1 - \gamma.$$

Wegen $\max\{1 - \gamma, \gamma\Delta\} \geqslant \Delta/(1 + \Delta) > \Delta - \Delta^2$ und (4) folgt so

$$| R_c |_\beta > \tilde{E}_{n-1}(H_\beta{}^1) - (8/\pi)^2\, e^{-2n\beta}.$$

Der Vergleich mit (16) zeigt unter Berücksichtigung von $| R_c |_\beta \leqslant | R_n |_\beta$, daß beide Normen asymptotisch gleich $(8/\pi)\, e^{-n\beta} + O(e^{-2n\beta})$ sind. Für $n\beta \to \infty$ ist die trigonometrische Interpolationsquadratur asymptotisch optimal.

Literatur

1. N. I. Achieser, "Vorlesungen über Approximationstheorie," Akademie-Verlag, Berlin, 1953.
2. R. Kreß, Zur numerischen Integration periodischer Funktionen nach der Rechteckregel, *Numer. Math.* **20** (1972), 87–92.
3. A. Schönhage, "Approximationstheorie," Walter de Gruyter, Berlin 1971.